实变函数

R^n中的开集和闭集

开集 def：$E \subset R^n$, $a \in E$, $\exists r>0$, s.t. $B_r(a) \subset E$, a is called 内点

点E全体内点所构成的集合E° is called E的内部

if $E^\circ = E$, E为R^n中的开集

($E=\phi$, $E^\circ=\phi$, $E=E^\circ$ 故ϕ为开集、R^n也为开集)

空心球：$\check{B}_r(\check{a}) = \{x \in R^n : 0 < \|x-a\| < r\}$

不依赖于开集而判断闭集的办法

def：设$E \subset R^n$, $a \in R^n$：$\forall r>0$，在空心球$\check{B}_r(\check{a})$中总有E中的点，称a为凝聚点 or 极限点

E的极限点可以$\in$ or $\notin E$，if $a \notin E$，则称a为E的孤立点

def：点集$E \subset R^n$的极限点的全体 is called E的导集(E')　$\bar{E} = E' \cup E$　$\bar{E}$ is called 闭包

theorem 8.3.3/4：E为闭集 $\Longleftrightarrow$ $E' \subset E$ / $\bar{E} = E$　(proof)

$\Longleftrightarrow$ E中$\forall$收敛点列的极限也在E中　(proof)

theorem：E的导集E'和闭包$\bar{E}$均为闭集 (proof)

E°为$\subset E$的max开集，$\bar{E}$为包含E的minimal闭集　(proof)

theorem 8.3.1 ：对$\forall$集E，E的内部E°为开集　(proof)

theorem 8.3.2 ：在空间R^n中

1) R^n、ϕ为开集 \ 闭集
2) 设$\{E_\alpha\}$为R^n一个开子集族，指标α来自一个指标集I，则$\bigcup_{\alpha \in I} E_\alpha$也为开集
   (任意多个开集的并为开集) \ (任意多个闭集的交为闭集)
3) 设$E_1, E_2, \cdots, E_m$为有限个开集，$\bigcap_{i=1}^{m} E_i$也为开集
   (有限个开集的交为开集) \ (有限个闭集的并为闭集)

(proof).

def：设点集$E \subset R^n$，$\underbrace{(E^c)}_{\text{补集}}{}^\circ$中的点称为E的外点，E的外点全体称为外部

既非内点又非外点 is called 边界点，E的边界点全体称为边界 ∂E

$\forall E \subset R^n$,　$E^\circ \cup (E^c)^\circ \cup \partial E = R^n$

$diam(E) = \sup\{\|x-y\| : x, y \in E\}$

theorem 8.3.7：(闭区间套定理) set $\{F_i\}$ (非空, $i=1,2,3\cdots$) 为一列闭集，$F_1 \supset F_2 \supset \cdots$

$\lim_{i\to\infty} diam(F_i) = 0$，$\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i$只含唯一的点　(proof)

E1：集合运算

$\bigcap_{n=1}$ G_δ型集 $[0,1]$ G_δ - 0测

单调集列 $\bigcup_{n=1}$ F_σ型集 $(0,1)$ $F_\sigma \cup$ 0测

R 表示实数域，$\bar{R}$ 表示 $R\cup\{-\infty,\infty\}$，对集合 X，用 2^X 表示 X 的所有子集组成的集合(集合族)，称为 X 的 **幂集**

集合上极限： $\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m = \{w : w \text{在无穷多个} A_n \text{中出现}\}$

集合下极限： $\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty} A_m = \{w : \text{从某个} n \text{开始} w \text{属于后续所有} A_n\}$

直积(笛卡尔积)： 集合 A, B $A\times B = \{(x,y) : x\in A, y\in B\}$ 类似可 define $X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ X^n, X^T (T 为 R 的子集)

上确界： $A\subset R$，m 为 A 的一个上界，且对 A 的任意上界 m' 都有 $m\le m'$，称 m 为 A 的上确界，记为 $\sup A$. if A 无有限的上界 则令 $\sup A=+\infty$ (类似定义下确界)

数列上极限： $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{m\ge n} a_m$ (可以等于 $\pm\infty$) 类似 definite 下极限，运数上极限与下极限

集合中元素的个数，分为三种情况： 1、有限个 2、无限可数个，称为可列个 3、无限不可数个

$R^n = \{(x_1,x_2,\cdots,x_n) : x_i\in R, i=1,2,\cdots,n\}$ 模为 $\|x\| = \sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$ 两点 x,y 距离为 $d(x,y) = \|x-y\|$ 序列 $\{x_n\}\subset R^n$ 收敛到极限 x，定义为 $\lim_{n\to\infty}\|x_n - x\| = 0$

R^n 中的点集 A 中点的分类：

内点 x： x 的邻域 均属于 A

边界点 x： $x\in A$ 且 x 的任意一个邻域 均与 A^c 都有非空交集 (其中，若 x 的一个邻域中仅有 x 属于 A 称 x 为 **孤立点**)

聚点 x： 存在 $x_n\in A$，$x_n\neq x$ 使得 $\lim_{n\to\infty} x_n = x$

闭包： A 与 A 的所有内点组成的集合的并集 称为 A 的闭包，记为 $\bar{A}$

R^n 中的闭集： A 包含其所有的聚点。即 A 对极限运算封闭。有限多个闭集的并是闭集，任意多个闭集的交是闭集，闭包是闭集

R^n 中的开集： 所有点都是内点的集合

生成的 σ 代数： 设全集为 X，A 是 X 的一些子集组成的集合族，称包含 A 所有 σ 代数的交集为 A 生成的 σ 代数.

Borel σ 代数： R^n 中所有开集生成的 σ 代数称为 Borel σ 代数，记为 $\mathcal{B}^n$，其中的集合称为 Borel 集

(Borel 集合的余集/可列并/可列交/上极限/下极限运算 结果均为 Borel 集)

列紧集和紧致集？

def: set $E\subset\mathbb{R}^n$，if E中$\forall$一点列均有子列收敛于E中一个点，称E为$\mathbb{R}^n$中的列紧集

theorem：$\mathbb{R}^n$中的集合E为列紧集 $\Longleftrightarrow$ E为有界闭集（proof）.

def: set $E\subset\mathbb{R}^n$，$\mathcal{F}=\{G_a\}$为$\mathbb{R}^n$中一个开集族，if $E\subset\bigcup\limits_a G_a$，则称开集族$\mathcal{F}$为$E$的开覆盖

($\forall a\in E$，$\exists$开集$G_a\in\mathcal{F}$ s.t. $a\in G_a$)

def: set $E\subset\mathbb{R}^n$，if 能从E的$\forall$一个开覆盖中选出有限个开集，它们仍为能组成E的开覆盖，称E为紧致集

theorem：$E\subset\mathbb{R}^n$为紧致集 $\Longleftrightarrow$ E为有界闭集

$\mathbb{R}^n$中 有界闭、列紧、紧致 为等价

实变函数部分

第一章：集合

1、集合的表示

2、集合的运算

$\{x:\{f_n(x)\}有界\} = \bigcup_{M\in R}\bigcap_{n=1}^{\infty}\{x:|f_n(x)|\le M\}$　　$\{x:\{f_n(x)\}无界\} = \bigcap_{M\in R}\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x:|f_n(x)|>M\}$

集合列的上极限与下极限：

上极限：设 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 是任意一列集，由上述集列中无限多个集合的那种元素的全体所组成的集合

记作 $\lim_{n\to\infty}\sup A_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \{x:存在无穷多个 A_n，使 x\in A_n\} = \{x: \bigcap_{N\in R^+}\bigcup_{n\ge N} x\in A_n\}$　　集合唯一的

下极限：对集列 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 除有限个下标外，属于集列中每个集合的元素全体所组成的集合

记作 $\lim_{n\to\infty}\inf A_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \{x:当n充分大后都有 x\in A_n\} = \{x: \bigcup_{n}\bigcap_{n\ge N} x\in A_n\}$

example:

1、$(a,b) = \bigcup_{n=1}^{\infty}[a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}]$

2、$Q_n = \{\frac{m}{n}, m\in Z\}$　$n=1,2,\cdots$　　$Q = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n$

3、(有限覆盖定理) $\{I_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ 为一族开区间，if $[a,b]\subset\bigcup_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha$，则存在 $\{\alpha_1 \sim \alpha_k\}\subset\Lambda$ s.t. $[a,b]\subset\bigcup_{i=1}^{k} I_{\alpha_i}$

4、(区间套定理) if $[a_n,b_n]\subset[a_{n-1}, b_{n-1}]$　$n=1,2,\cdots$ 且 $\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$，则存在唯一 $a\in R$ s.t. $a\in[a_n,b_n]$ / $\{a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$

5、$\{x: \lim_{n\to\infty} f_n(x)=0\} = \bigcap_{\varepsilon\in R^+}\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n=N}^{\infty}\{x:|f_n(x)|<\varepsilon\}$

集合的下确界：集合的可数交，包含在所有集合中的最大集合

$\inf\{X_m, m\in N\} = \bigcap_{m=1}^{\infty} X_m$

集合的下极限：　属于下极限的元素 a，$\exists$ 足够大的 N，使得 $a\in X_n$ 对所有 $n\ge N$ 均成立

$I_n = \inf\{X_m, m\ge n\}$，$I_n$ 非递减　　$\lim_{n\to\infty}\inf X_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty} X_m$

集合的上确界：集合的可数并，包含所有集合的最大集合

$\sup\{X_m, m\in N\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} X_m$

集合的上极限：属于上极限的元素 a，$\forall$ 自然数 N，能在大于 N 的自然数中找到一个 n，使 $a\in X_n$

$I_n = \sup\{X_m, m\ge n\}$，$I_n$ 非递增，$\overline{\lim_{n\to\infty}} X_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty} X_m$

3、对数与基数

Bernstein theorom：A、B为2个非空集合，if A 对等（双射）于 B 的一个子集，B也对等于 A 的一个子集

那么 A 对等于 B

a：N 的基数

c：R 的基数

4、可数集合

def：与全体正整数 Z^+ 对等的集合 is called 可数集合 / 可列集合　（可数集合为无限集合）

theorem：1、任何无限集都至少包含一个可数子集

2、可数集的任何无限子集必为可数集合，

3、设 A_i 为可数集，则 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 也是可数集

4、有理数全体成一可数集合　（有理数在实数中处处稠密）

5、代数数的全体成一可数集　（代数数 def：整系数多项式的根）

5、不可数集

def：不可数集合的无限集合 is called 不可数集合

theorem：1、全体实数组成集合 R 为不可数集合

2、R 的基数为 c，Z^+ 的基数为 a，则 $c > a$

3、集合 $\{A_n : n \in Z^+\}$ $\bar{\bar{A_n}} = c$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 而 $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 则 $\bar{\bar{A}} = c$

4、n 维 Euclid 空间 R^n 的基数为 c

5、设 M 为任意的一个集合，它所有子集作成集合 μ (2^M)，则 $\bar{\bar{\mu}} > \bar{\bar{M}}$ ($\bar{\bar{2^M}} > \bar{\bar{M}}$)

第二章：点集

1、度量空间，n维欧氏空间

def 1：邻域，开区间

def 2：收敛

def 3：两个非空点集 A, B 的距离 def 为：$d(A,B) = \inf\{d(x,y) : x \in A, y \in B\}$

def 4：非空点集 E 的直径 def 为：$\delta(E) = \sup\limits_{\substack{P \in E \\ Q \in E}} d(P,Q)$

def 5：设 E 为 R^n 中一点集，if $\delta(E) < \infty$，则称 E 为有界点集 ≠有限点集

2、聚点、内点、界点

def1:

内点：$\exists U(P_0)$ s.t. $U(P_0) \subset E$，称 P_0 为 E 的内点

外点：P_0 为 E^c 的内点

边界点：P_0 非内点 or 外点

def2:

聚点：$U(P_0)$ 含有含有无穷多个属于 E 的点　　P_0 为 E 的聚点 $\Leftrightarrow$ $U(P_0)$ 至少含有一个属于 E 但异于 P_0 的点 $\Leftrightarrow$ $\exists$ E 中互异的点组成点列 $\{P_n\}$ 使得 $P_n \to P_0$ $(n \to \infty)$

内点 $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ 聚点　（有限集无聚点）

孤立点：$E \subset R^n$，P_0 为 R^n 中定点，若 $P_0 \in E$，但非 E 的聚点，则 P_0 is called E 的孤立点

R^n 中的点（对 E 而言）$\begin{cases} \text{内点} \\ \text{界点} \\ \text{外点} \end{cases}$ or $\begin{cases} \text{聚点} \\ \text{孤立点} \\ \text{外点} \end{cases}$

def3：设 E 为 R^n 中一个点集

开核：全体内点所组成的集合，记为 $\mathring{E}$　　闭包：$\bar{E} = E \cup E' = E \cup \partial E$

导集：全体聚点所组成的集合，记为 E'

边界：……界点 ……，……∂E

3、开集，闭集，完备集

def1:

开集：$E\subset R^n$，E的每一点均为内点　$E=\mathring{E}$

闭集：$E\subset R^n$，E的每一个聚点都属于E　$E'\subset E$

theorem:

任意多个开集之并，有限多个 ~~无限多个~~ 开集之交仍为开集　　开集交不一定为开集　$\bigcap(a-\frac{1}{n},b+\frac{1}{n})=[a,b]$

任意多个闭集之交，有限多个 ~~无限多个~~ 闭集之并仍为闭集　　闭集并不一定为闭集　$\bigcup[a+\frac{1}{n},b-\frac{1}{n}]=(a,b)$

Heine-Borel 有限覆盖定理：

设F为一个有界闭集，$\mathcal{M}$为一族开集$\{U_i\}_{i\in A}$，它覆盖了F（$F\subset\bigcup_{i\in A}U_i$），则$\mathcal{M}$中一定存在有限多个开集$U_1,U_2,\cdots,U_m$ 它们同样覆盖了F（$F\subset\bigcup_{i=1}^{m}U_i$）

def2:

M为X中一集合，$\mathcal{M}$为X中任一族覆盖了M的开集，若从$\mathcal{M}$中选出有限个开集仍覆盖M，则称M为X中的紧集

theorem：在R^n中，紧集$\Leftrightarrow$有界闭集

但在一般度量空间中 紧集 $\not\Leftrightarrow$ 有界闭集

def3:

1、$E\subset R^n$，若$E\subset E'$，E为自密集　（无孤立点的集合）　有理数集

2、$E\subset R^n$，若$E=E'$，称E为完备集　（无孤立点的闭集）

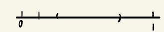
4、直线上的开集、闭集及完备集的构造

def 1：设 G 是直线上的开集，if $(\alpha,\beta)\subset G$，且端点 $\{\alpha,\beta\}\notin G$，(α,β) is called G 的构成区间

def 2：A 为闭集，A^c 构成的区间为 A 的余区间 or 邻接区间

theorem：1、（开集构造定理）直线上任一非空开集可表示成有限个 or 可数个互不相交的构成区间的和集.

2、直线上的闭集 F 是全直线，or 从直线上挖掉有限个 or 可数个互不相交的开区间（F 的余区间）所得到的集.



5、康托尔三分集

def：设 $E\subset R^n$

(1) $F\subset R^n$，对 $\forall x\in F$ 和任意邻域 $U(x)$，$U(x)\cap E\neq\varnothing$，则称 E 在 F 中稠密 （Q^n 在 R^n 中稠密）

(2) $\forall x\in R^n$ 和任意邻域 $U(x)$，$\exists\ U(y)\subset U(x)\cap E^c$，则称 E 是疏朗集 （example：有限点集、收敛可数列、）

		区间数	剩	挖
$[0,\frac{1}{3}]$，$[\frac{2}{3},1]$	1次	2	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
	2次	2^2	$(\frac{2}{3})^2$	$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}$
	3次	2^3	$(\frac{2}{3})^3$	$(\frac{2}{3})^2\cdot\frac{1}{3}$
	⋮	⋮	⋮	
	n次	2^n	$(\frac{2}{3})^n$	$(\frac{2}{3})^{n-1}\cdot\frac{1}{3}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{3^n}=1$$

从 $[0,1]$ 中挖去可数个互不相交且无公共端点的开区间，剩下的必为闭集，称为 Cantor 三分集，记为 P

☆ Cantor 三分集的性质：

1) P 为完备集：P 无孤立点，P 自密，P 为闭集

2) P 无内点：P 为没有内点的闭集，P 为疏朗集

3) $[0,1]\setminus P$ 为可数个互不相交的开区间，长度为 1：P 的测度为 0

4) P 的基数为 c：基数为 c

Handos 维数：分形图形分成 N 个相等部分，每一部分在线性尺度上为原图形的 $\frac{1}{m}$，则该图形的维数为 $\log_m N$

Cantor 集 $[0,\frac{1}{3}]$ & $[\frac{2}{3},1]$：$\log_3 2$

特点：测度为零 & 基数为 c 的疏朗完备集